***Procrustes analysis***

SPSS macros by Kirill Orlov

kior@comtv.ru, ttnphns@gmail.com

<https://www.spsstools.net/en/KO-spssmacros>

All rights reserved

*Procrustes analysis*. Procrustes analysis for two configurations finds a way to maximally superpose two clouds of points in space, provided that a point in one cloud is designedly correspondent with a point in the other. Residual amount of mismatch tells of initial degree of non-identity of configurations. The analysis is used in tasks of comparing shapes and juxtaposition of ordinations (for example factor loading matrices – for detecting identical factors).

# MACRO !KO\_PROCRUST: PROCRUSTES ANALYSIS FOR TWO CONFIGURATIONS

Version 2, Nov 2012 (Version 1, Mar 2011). Tested on SPSS 15, 17, 20.

!KO\_procrust fit= *a1 a2 a3* /\*Variable names constituting configuration that must get fit

/target= *b1 b2 b3* /\*Variable names constituting configuration which to fit to

/center= YES /\*Preliminary center configurations: NO (default) or YES

/scale= YES /\*Preliminary scale (normalize) configurations: NO (default) or YES

/rotat= /\*Rotation type: Orthogonal (ORTHO, default), ortho-to-perpendicular (ORTPERP),

/\*oblique-to-orthogonal (SKEWORT), suppress Procrustes rotation (NONE)

/norefl= /\*With ORTHO: Prohibit reflection during rotation (YES) or not prohibit (NO, default)

/isoscale= /\*Additional after-fit with isoscaling: NO (default) or YES

/perm= *1000* /\*Optional: do random-permutation test of significance of similarity

/\*(specify number of permutations)

/save= /\*Save fitted and target configurations as new dataset: NO (default) or YES

/output= LONG /\*Printout results: short (SHORT, default) or detailed (LONG).

Minimal specification FIT, TARGET.

Ортогональный прокрустов анализ для двух конфигураций берет 2 облака точек в евклидовом пространстве стольких-то ортогональных осей (измерений) и поворачивает одну конфигурацию (облако) относительно начала координат до достижения ею максимального, насколько позволяет операция поворота, наложения на вторую конфигурацию[[1]](#footnote-1). Под этим наложением следует разуметь максимальное совмещение взаимоотвечающих друг другу точек двух конфигураций (каждой точке одной конфигурации пользователь исходно назначает в соответствие одну точку другой конфигурации, и цель прокрустова анализа – максимально сблизить взаимосоответственные точки в пространстве).

По желанию, можно предварительно совместить центры конфигураций с началом координат и сравнять размеры конфигураций, и тогда степень их итоговой совмещенности (подогнанности) после вращения будет говорить о степени одинаковости их *формы*.

Неортогональный или косоугольный прокрустов анализ (тоже выполним данным макросом), совмещая конфигурации, допускает специфическое искажение формы, связанное со снятием требования, чтобы оси-измерения в конфигурациях были взаимоортогональными.

Прокрустов анализ включает в себя следующие преобразования в такой последовательности:

1. Предварительное совмещение центров конфигураций в одной точке – начале с-мы координат (центрация);
2. Предварительное приведение размеров конфигураций к одной величине (масштабирование);
3. Основная часть – вращение первой конфигурации в пространстве для максимального совмещения со 2-й конфигурацией; вращение может дополняться зеркальным отражением относительно одной или нескольких осей пространства ради более полного совмещения (вращение/отражение);
4. Заключительное равномерное по всем направлениям расширение или сжатие, могущее улучшить совмещение (изотропное масштабирование).

Любые из этих 4-х этапов пользователь может не задействовать – смотря по своим задачам, – кроме (3), который обязателен. Впрочем, макрос позволяет не делать и этого этапа.

Прокрустово вращение (ортогональное) показано на рисунке. **Подгоночная** конфигурация «укладывается» в пространство осей **целевой** (фиксированной) конфигурации и совершает поворот, необходимый до максимального, насколько возможно, совмещения соответствующих точек двух конфигураций. После такой подгонки координаты точек подгоночной конфигурации на оси целевой конфигурации называются **подогнанной** конфигурацией (оси подогнанной конфигурации = оси целевой конфигурации)



Области применения прокрустова анализа очень разнообразны. Во-первых, это один из главных методов *сравнения образов* (к примеру, сравнение фотографий лиц в криминалистике, сравнение изделий со стандартом в промышелнном контроле качества, молекулярных структур в химии, и т.д.). Во-вторых, этот метод популярен как средство *сопоставления ординаций* – например факторных нагрузок от разных факторных анализов в дифференциальной или кросс-культурной психологии/социологии (прокрустов анализ может быть в этом плане технически более простой альтернативой конфирматорному факторному анализу). Наконец, можно упомянуть, что в специальной связке с анализом главных компонент прокрустов анализ может посоветовать *отбор информативных характеристик* из большого множества замеренных характеристик лучше, чем анализ главных компонент один.

Входящими в макрос являются 2 набора переменных рабочего массива данных. Один из них вы укажете как *подгоночную* конфигурацию, которую надо подогнать, преобразовав этим в *подогнанную*; другой набор переменных укажете как *целевую* конфигурацию – к которой подгонять. Переменные это измерения, оси пространства. Необходимо пояснить, что они не обязаны быть у двух конфигураций одними и теми же свойствами или характеристиками; более того, их количество может там и там различаться. Точки конфигураций это строки массива. Точки в обеих конфигурациях, напротив, «одни и те же» – в смысле, что каждой точке одной конфигурации заведомо назначена в соответствие точка второй конфигурации. Сами данные есть координаты точек в пространстве измерений.

***Статистика качества подгонки***

Прокрустов анализ минимизирует квадратное евклидово расстояние между конфигурациями **Y** (целевая) и **X** (подогнанная подгоночная), которое есть сумма квадратов остатков «координаты **Y** минус координаты **X**», т.е. есть общая *SSerror*. Эта статистика, в виде среднеквадратического остатка, показывается в результатах и является показателем степени подогнанности, т.е. степени похожести конфигураций:

, где C – число остатков.

Минимизация общей *SSerror* равнозначна максимизации величины *trace(***Y’X***)*, т.е. масштаба конфигурации, произведенной («гибридной») из двух, **X** и **Y**. Эту величину можно понять как сумму кросс-произведений между матрицами **X** и **Y**,вытянутыми каждая в вектор, *X* и *Y*: *Sum(xiyi).* Макрос нормирует ее двумя способами, получая соответственно два коэффициента, варьирующих от -1 до 1. В условиях прокрустова анализа только значения, близкие к 1, но не к -1, говорят о хорошей подогнанности:

* Коэффициент идентичности (Identity coefficient) есть нормирование делением на среднеарифметический масштаб **X** и **Y**:



* Коэффициент пропорциональности (Proportionality coefficient) есть нормирование делением на среднегеометрический масштаб **X** и **Y**. Этот коэффициент суть косинус между *X* и *Y* и известен еще под именем коэффициента конгруэнтности Такера:



*RMSerror* можно сравнивать между анализами, сделанными на одних и тех же данных, но в разных режимах (разумея под режимами разные варианты задания подкоманд CENTER, SCALE, NOREFL, ISOSCALE). *IDc* и *PRc*, напротив, существуют, чтобы сравнивать результаты, полученные на разных входящих данных, но в одинаковых режимах. *PRc* нечувствителен к наличию или отсутствию изомасштабирования (ISOSCALE). Если **X** или **Y** изменить умножением на положительную константу k, *PRc* не отреагирует. *PRc*=1, когда **X**=k**Y**. *IDc* чувствителен ко всякому изменению **X** или **Y**. *IDc*=1, когда **X**=**Y**, т.е. *SSerror*=0.

Три эти статистики подогнанности выдаются макросом не только для конфигураций **X** и **Y** в целом (общая подогнанность), но также отдельно по рядам (точкам) и столбцам (измерениям). Следует отметить, что интерпретация качества подгонки в случае *точек* и в случае *измерений* не совсем одно и то же. Точки в конфигурациях предзаданно парно взаимосоответствуют, и остается только спросить, насколько это соответствие геометрически оправданно, подтверждается ли. В случае измерений ситуация иная. Изначально парное соответствие между измерениями подгоночной конфигурации с одной стороны и целевой конфигурации с другой обычно не задано[[2]](#footnote-2) (даже число измерений может быть разным). Одной из целей анализа – анализа ординаций прежде всего – является как раз нащупать такое соответствие, если оно есть. Немного подробнее:

**По-точечная** подогнанность показывает, насколько точка i целевой конфигурации совпадает с точкой i подогнанной конфигурации. Точка i в подогнанной конфигурации это та же точка, что точка i в подгоночной конфигурации. Поэтому по-точечная подогнанность говорит о степени геометрического соответствия точки i подгоночной конфигурации точке i целевой конфигурации. По-точечная подогнанность важна преимущественно в задаче сравнения прокрустовым анализом двух конфигураций как двух *образов*.

**По-измеренная** подогнанность показывает, насколько координаты точек по измерению j в целевой конфигурации совпадают с координатами точек по этому измерению (j) в подогнанной конфигурации. Измерение же (ось) j подогнанной конфигурации есть некоторое измерение (ось) подгоночной конфигурации, повернутое на угол ϕ. Матрица вращения – макрос может ее показать – содержит косинусы углов между осями подогнанной конфигурации (= оси целевой конфигурации) и осями подгоночной конфигурации. Первые образуют столбцы матрицы, вторые – ее ряды. Разумно считать, что поворот происходит на минимальный достаточный угол, поэтому cos ϕ поворота той некоторой оси подгоночной конфигурации в ось j подогнанной конфигурации есть максимальное по абсолютной величине значение в столбце j матрицы; и ряд k, в котором лежит это значение, есть номер той оси подгоночной конфигурации, что повернулась в ось j подогнанной конфигурации. Чем ближе этот косинус к 1 (или к -1), тем ближе ϕ к 0° (или же к 180°), и следовательно тем больше оснований говорить о совпадении оси k подгоночной конфигурации с осью j подогнанной и целевой конфигураций. *Если эти оси k и j почти совпадают и при этом по-измеренная подогнанность по оси j высока, то можно сделать вывод о том, что для измерения j целевой конфигурации найдено практически тождественное измерение k в подгоночной конфигурации*. Именно подобный вывод делается (или отбрасывается) в задаче сравнения прокрустовым анализом двух конфигураций как *ординаций* (см. ПРИМЕР 2, сравнение факторных структур).

***Подкоманды***

**FIT, TARGET**

В FIT укажите переменные массива, являющиеся измерениями в подгоночной конфигурации, а в TARGET – переменные, являющиеся измерениями в целевой конфигурации. Списки поименно и/или ч-з to. Имена должны быть *не длиннее 8 символов*. Нумерация измерений в конфигурациях будет в соответствии с порядком имен в списке, а не с порядком переменных в массиве. Две конфигурации не обязаны быть равными по числу измерений: макрос внутренне добавит меньшей конфигурации столбцы, заполнив их нулем. Пропуски в данных не разрешены.

**CENTER, SCALE**

Это подкоманды довращательных преобразований обеих конфигураций – центрации (CENTER) и масштабирования (SCALE). Центрация переносит начало координат в геометрический центр конфигурации, а масштабирование (делается после центрации, если последняя заказана) приводит сумму квадратов координат конфигурации к единому числу. Данный макрос приводит к арифметически усредненной между двумя конфигурациями сумме квадратов[[3]](#footnote-3). По умолчанию/незаданию обе подкоманды установлены на NO. Задайте YES, если данное преобразование вам нужно.

Если вы заказываете какое-л. из этих преобразований, то входящими в анализ конфигурациями считаются уже не изначальные, а преобразованные конфигурации, так что именно последние показываются в окне результатов и относительно них вычисляются статистики качества подгонки.

**ROTAT**

Вариант прокрустова вращения. Укажите одно из 4-х ключевых слов:

NONE - не делать вообще вращения. Конфигурации будут сравнены без какого-либо поворота подгоночной конфигурации. (Это значит, что 1-е измерение подгоночной конфигурации заведомо принимается тождественным 1-му измерению целевой конфигурации, 2-е – 2-му, и т.д.)

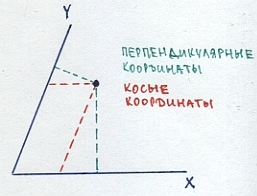
ORTHO - (тж. по умолчанию/незаданию подкоманды) Ортогональное прокрустово вращение. Обе конфигурации – подгоночная и целевая – принимаются за координаты в системе взаимоортогональных осей-измерений, и поворот подгоночной конфигурации не изменяет углов между ее осями. Используйте этот вариант, например, для сопоставления между двумя ортогональными факторными решениями. Вы можете также сопоставить два косоугольных факторных решения, если корреляции между факторами (углы между осями) в обоих решениях одинаковы.

Неортогональное прокрустово вращение, в отличии от ортогонального, допускает, что углы между осями не одни и те же в двух сравниваемых конфигурациях, поэтому поворот подгоночной конфигурации подразумевает и возможное изменение углов между осями этой конфигурации (это то же самое, что сказать: допускается специфическое искажение формы конфигурации в прежних осях). Два варианта неортогонального вращения – ортогональное-в-косоугольное и косоугольное-в-ортогональное:

ORTPERP - подгоночная конфигурация должна иметь ортогональные оси, а целевая – потенциально неортогональные оси; данные в целевой конфигурации это *перпендикулярные* координаты.

SKEWORT - целевая конфигурация должна иметь ортогональные оси, а подгоночная – потенциально неортогональные оси; данные в подгоночной конфигурации это *косые* координаты.

Используйте неортогональные варианты вращения, например, для сопоставления между ортогональным факторным решением и (потенциально) косоугольным. Когда оси-измерения не ортогональны, координаты бывают двух видов – перпендикулярные и косые, как показано на рисунке ниже. Пример перпендикулярных координат это, в факторном анализе, матрица факторной структуры (factor structure matrix), а пример косых координат это матрица факторного отображения (factor pattern matrix). Если ваше целевое факторное решение ортогонально, вам нужно, чтобы сравниваемое с ним подгоночное решение было факторным отображением. Если ваше целевое факторное решение косоугольно, вам нужно, чтобы это была факторная структура, а сравниваемое подгоночночное решение было ортогонально[[4]](#footnote-4).



При ROTAT=ORTHO, в матрице вращения сумма квадратов и в столбцах и в рядах равна 1. При ROTAT=ORTPERP сумма квадратов в столбцах матрицы равна 1, а в рядах не равна 1, что говорит о том, что ортогональные подгоночные оси отобразились в неортоогональные целевые оси; при ROTAT=SKEWORT сумма квадратов в столбцах матрицы не равна 1, а в рядах равна 1, что говорит о том, что неортогональные подгоночные оси отобразились в ортоогональные целевые оси.

**NOREFL**

Это подкоманда действует только при ROTAT=ORTHO. По умолчанию/незаданию и NOREFL=NO вращение может сопровождаться отражением (переворачиванием через ось) подгоняемой конфигурации, если это приведет к лучшей подогнанности. Вы можете запретить отражение, указав NOREFL=YES, и совмещение двух конфигураций будет успешным на столько, на сколько позволит одно лишь вращение вокруг начала системы координат.

Опцию отражения не отключают, если хотят успешного совмещения сильно подобных, но зеркальных по отношению друг к другу конфигураций. Или, другими словами, опция отражения делает успех совмещения нечувствительным к тому, *в каком порядке* указаны переменные-оси в FIT или TARGET. (Следовательно, если вы употребляете анализ как средство сопоставления двух ординаций, то получаете ответ на вопрос, хорошо ли соответствует данному измерению целевой конфигурации *какое-либо по номеру* измерение подгоночной конфигурации.)

Отключают опцию отражения тогда, когда зеркальность двух конфигураций не игнорируют и принимают за различие. Другими словами, когда требуют предзаданного порядка осей: запрет отражения эквивалентен фиксации нумерации измерений. (Следовательно, как средство сопоставления двух ординаций такой анализ ответит на вопрос, хорошо ли соответствует данному измерению целевой конфигурации *определенное по номеру* измерение подгоночной конфигурации; стало быть тут речь идет обо *определенной* гипотезе. Например, если вы при сравнении матриц факторных нагрузок проверяете гипотезу, что 1-й фактор одной матрицы отвечает непременно 1-му другой, 2-й фактор отвечает именно 2-му другой, и т.д., то вам надо указать факторы в таком строгом порядке в FIT и в TARGET и запретить отражение, а в матрице поворота проверить, в самом ли деле максимальными оказались диагональные элементы.)

**ISOSCALE**

Это подкоманда действует только при ROTAT=ORTHO. Опционально вы можете затребовать изотропное масштабирование (ISOSCALE=YES), которое равномерно сужает или расширяет повернутую подгоночную конфигурацию ради дальнейшего уменьшения недоподогнанности, *RMSerror*. Это делается умножением всех координат подогнанной конфигурации на константу (коэффициент изотропного масштабирования). Изотропное масштабирование – не всегда то, что понравится исследователю, ибо оно для уменьшения *RMSerror* может сделать размер (масштаб) подогнанной конфигурации сильно отличным от такового целевой конфигурации, при этом *IDc* может и снизиться. *PRc* не реагирует на изотропное масштабирование.

**PERM**

Необязательная подкоманда, которой можно затребовать тест статистической значимости подобия между подгоночной и целевой конфигурациями. Это монте-карловский перестановочный тест (Monte Carlo permutation test), в котором случайным перестановкам подвергаются точки в целевой конфигурации. Он проверяет нуль-гипотезу, что

во входящих данных *точкам подгоночной конфигурации в пару были назначены произвольные точки целевой конфигурации*. Альтернативная гипотеза, принимаемая при близящейся к 0 значимости, – что им в пару были назначены схожие с ними точки целевой конфигурации. Укажите целое положительное число – сколько случайных перестановок (переспариваний точек) проделать. Обычно задают от 500 до 10000. Чем более точный (exact) тест вы хотите, а также чем больше у вас точек (рядов входящих данных), тем большее число следует задать. Использование этой подкоманды удлиняет работу макроса, и тем сильнее, чем большее число вы зададите. Макрос выдаст в окно результатов 1-сторонние значимости (p-значения). Результаты от пуска к пуску меняются, т.к. зависят от датчика случайныхчисел; для повторения результата задайте определенное зерно для случайных чисел в меню Transform – Random Number Generators.

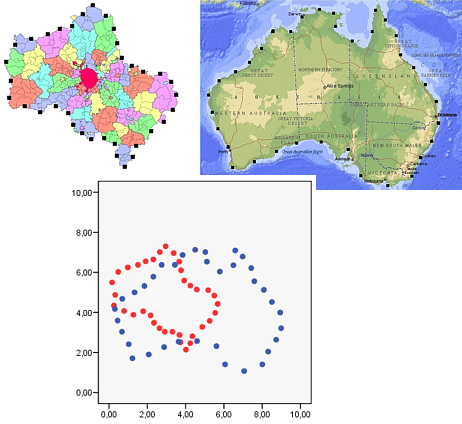
**SAVE**

Опционально (SAVE=YES) можно сохранить подогнанную конфигурацию заодно с целевой конфигурацией как новый рабочий массив данных. Измерения в обеих этих конфигурациях это измерения целевой конфигурации. В сохраненной целевой конфигурации их имена получат приставку T\_, а в сохраненной подогнанной конфигурации – приставку F\_. Если анализ добавлял измерения в целевую конфигурацию, они получат номера.

**OUTPUT**

По умолчанию/незаданию и OUTPUT=SHORT в окно результатов выводится только статистика качества подгонки и значимость. OUTPUT=LONG позволяет получить подробные результаты, включая матрицу вращения.

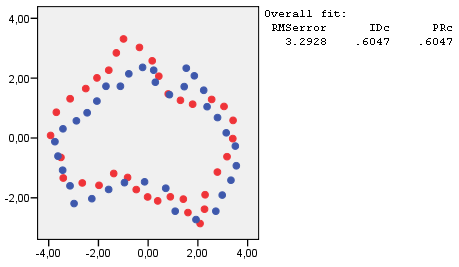
ПРИМЕР 1. Сравнение образов – очертаний Московской области и Австралии. Карты того и другого были приблизительно равномерно обложены 35 точками (нумерация точек там и там идет против часовой стрелки начиная с 12 ч.) и затем оцифрованы. Обе конфигурации показаны ниже на одной диаграмме.



!KO\_procrust fit= mo\_x mo\_y /target= au\_x au\_y /center= YES /scale= YES /norefl= YES /save= YES.

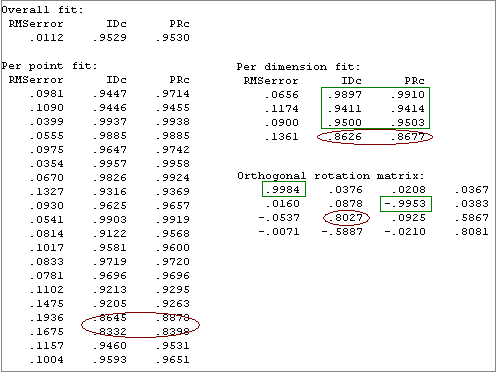
graph /scatterplot(overlay)= mo\_x au\_x with mo\_y au\_y (pair).

* Московская область указана как подгоночная конфигурация, а Австралия как целевая конфигурация; измерений по два – X и Y. Заказаны инициальные центрация и одномасштабирование конфигураций, поскольку видно на диаграмме, что они сдвинуты друг относительно друга и начала координат и кроме того различаются размером, тогда как мы желаем сопоставить фигуры только по их форме. Далее, мы запрещаем анализу возможное перевертывание фигуры Московской области при сопоставлении: NOREFL=YES. Изотропное масштабирование не употребляем, т.к. оно может сделать размеры фигур неодинаковыми, чего нам не хочется, раз мы специально уравняли масштабы.
* Результат совмещения на рисунке ниже. Т.к. предварительно было сделано одномасштабирование конфигураций, а изотропное масштабирование не делалось, IDc=PRc.



ПРИМЕР 2. Сравнение ординаций – двух матриц факторных нагрузок. При разработке психологического теста, прокрустовым анализом решается вопрос, различаются ли факторные матрицы у женщин и мужчин. (Если окажется что да, разумно будет создать 2 версии теста – для женщин и для мужчин. Если окажется что нет, можно делать единый тест.) Исследователь провел отдельно факторный анализ для тех и для других и решил, что у мужчин корреляции между 20 пунктами теста достаточно полно объясняются 3-мя факторами, а у женщин – 4-мя факторами. Выделив там и там факторы, он подверг их варимакс-вращению.

!KO\_procrust fit= fac1\_m fac2\_m fac3\_m /target= fac1\_f fac2\_f fac3\_f fac4\_f /output= LONG.



* За целевую конфигурацию взята факторная матрица женская, за подгоночную – факторная матрица мужская. Факторы – это измерения. Пункты теста – строки матриц нагрузок – это точки.
* Нет смысла делать центрацию, масштабирование, изотропное масштабирование. Эти вещи делаются обычно только в задачах сравнения образов, а не сравнения ординаций.
* В результатах нас интересует первым делом по-измеренная, т.е. по-факторная подогнанность (Per dimension fit). Коэффициент IDc (он в данном случае важнее всего) очень высок для первых трех факторов. Порогом для сравнения факторных матриц, выше которого можно решить, что возможно соответсвие факторов, традиционно считается 0.9 (более жесткая рекомендация – 0.95). В нашем случае у трех факторов коэффициент выше 0.9, что значит, что этим трем женским факторам вполне возможно отвечают три мужских фактора. Последнему, 4-му женскому фактору не отвечает в достаточной степени ни один мужской фактор, т.к. коэффициент ниже 0.9.
* Какие же мужские факторы тождественны каким женским? Обратимся за ответом к матрице ортогонального вращения. Столбцы есть женские факторы, строки – мужские (последних введено было всего 3, но анализ добавил 4-й фактор, состоящий из нулевых нагрузок, чтобы факторов там и там было по 4; при ортогональном повороте координаты добавленного мужчинам «пустого» фактора, конечно, перестали быть нулевыми). Видно, что 1-й женский фактор почти идеально совпадает с 1-м мужским (косинус угла между их осями 0.998, т.е. 3.3 градуса). 3-й женский фактор сильно похож в свою очередь на 2-й мужской фактор, лишь противонаправлен ему (т.е. нагрузки были с обратным знаком). Итак, 2 фактора у мужчин и женщин можно признать совпадающими. 2-й женский фактор, имея высокий IDc, имеет скромный максимальный косинус (0.8), и это следует принять в том смысле, что фактора, который достаточно хорошо совпал бы с ним, нет среди трех мужских факторов (быть может, экстрагируй мы для мужчин 4, а не 3 фактора, удовлетворительно совпадающий фактор тогда бы явился).
* Заметим, что по-точечная подогнанность (Per point fit), т.е. подогнанность по отдельным пунктам теста, почти везде высока. У двух пунктов, впрочем, коэффициенты ниже чем у других. Эти пункты более остальных различаются своим профилем факторных нагрузок, т.е. имеют тенденцию по-разному вести себя в ответах мужчин и женщин; возможно, стоит поэтому подумать об исключении этих пунктов из теста.

***Особые режимы***

Макрос не слушается взвешивания (впрочем, он не берет в процедуру наблюдения с пропущенными и неположительными весами) и не рассчитан на расщепленное состояние массива данных.

***Некоторые вопросы***

* *Какую конфигурацию брать за целевую, а какую за подгоночную при ортогональном прокрустовом вращении?* В сравнении образов, т.е. вопросе **качества совмещения конфигураций точек** – не имеет значения, если изотропное масштабирование не употреблять. Изотропное масштабирование влияет на общую и по-точечную *RMSerror*, но если SCALE=YES, тогда только на по-точечную. Если вы заказали тест значимости (PERM), то он делается относительно подгоночной конфигурации: точки случайно переставляются только в целевой конфигурации.

**По-измеренная** подогнанность зависит от того, какую конфигурацию назначить целевой, а какую подгоночной, так что этот выбор имеет значение в сравнении ординаций – где вопросом выступает **взаимосоответствие измерений**. Поскольку по-измеренная подогнанность характеризует степень совпадения конфигураций по измерениям *целевой* конфигурации, целевой ординацией следует назначить более авторитерную из двух для вас, именно она рассматривается как фиксированная, лишенная неточностей. Целевая конфигурация – структура «нормативная», «референтная», «гипотетическая», «идеальная»; подгоночная – структура наблюдаемая, фактическая, проверяемая на изоморфность той. В целевой конфигурации все измерения принимаются за одинаково валидные, важные; если это не так, в ней следует оставить только важные из них. Если обе ординации одинаково авторитетны для вас, имеет смысл проделать анализ дважды, назначив целевой сначала одну, потом другую; и после идентификации пары почти совпадающих осей с помошью матрицы вращения, если такая пара обнаружится, признать эти два измерения в ординациях взаимосоответственными, если подогнанность хороша как по тому, так и по другому измерению в этой паре. Идентификация же совпадающих осей в обоих анализах будет одинаковой, поскольку матрица ортогонального вращения не зависит от того, какую из конфигураций назначить целевой: именно, если в одной конфигурации p измерений, а в другой q измерений, то квадратная подматрица, состоящая из первых min(p,q) столбцов и рядов, в обоих случаях одна и та же, только транспонирована. Например, пусть факторная структура A целевая, а факторная структура B подгоночная, и если окажется, что 1-й оси в A отвечает 3-я ось в B, то, когда B становится целевая, а A подгоночная, это же и сохранится: 3-й оси в B, окажется, отвечает 1-я ось в A. И тогда, *если* подогнанность по 1-му фактору, когда A целевая, хороша, и подогнанность по 3-му фактору, когдаB целевая, тоже хороша, то 1-й фактор A и 3-й фактор B можно признать тождественными друг другу.

* *В целевой конфигурации измерений было меньше чем в подгоночной. Почему тогда согласно «По-измеренная подогнанность» измерений столько же?* Анализ на входе добавил недостающие измерения, считая, что они как бы существуют в целевой конфигурации, но координаты по ним равны 0. По этим последним измерениям *RMSerror* определяется исключительно подогнанной конфигурацией, поэтому *IDc* и *PRc* выходят как 0. Нет смысла интерпретировать результат по этим добавленным в целевую конфигурацию «пустым» измерениям.

1. Это то же самое, что сказать, что конфигурации изначально максимально наложены друг на друга, только координатные оси у одной из них не совпадают с осями у другой, будучи повернуты к ним под углом. Прокрустого вращение заключается в устранении этой повернутости, в совмещении двух систем осей. [↑](#footnote-ref-1)
2. Если соответствие задано, должно быть запрещено отражение (см. п/к NOREFL). [↑](#footnote-ref-2)
3. Усреднение сделано для удобства, чтобы можно было сравнивать RMSerror в режиме с масштабированием и без масштабирования. [↑](#footnote-ref-3)
4. Если вы располагаете матрицей **С** корреляций между факторами (факторный анализ всегда выдает ее после косоугольного вращения), то всегда сможете получить матрицу отображения P из матрицы структуры S и наоборот: **S**=**P**\***C**; **P**=**S**\*inv(**C**). [↑](#footnote-ref-4)